UMA HIERARQUIA LIGADA AO TESTE DE CAUCHY

VENZKE, Cristiane Schwartz[1]; NORNBERG, Gabrielle Saller[2]; BOURCHTEIN, Lioudmila[3]

[1]Acadêmica de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pelotas – UFPEL, crisvenzke@hotmail.com; [2]Acadêmica de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pelotas – UFPEL, gabillysn@hotmail.com; [3]Doutora e Professora colaboradora da Universidade Federal de Pelotas – UFPEL, Departamento de Matemática e Estatística, andburstein@gmail.com.

1 INTRODUÇÃO

Para calcular a soma de uma progressão geométrica, avaliar os números irracionais, inclusive os famosos π, e e φ, ou encontrar as características de fractais matemáticos, precisamos nos envolver com o cálculo das séries numéricas. Tudo isso está ligado com diversos problemas práticos e, além disso, uma imensa variedade de problemas em ciências naturais pode ser descrita via equações diferenciais, cuja solução se encontra em termos de uma série de funções. Vários exemplos de problemas deste tipo surgem em áreas como a física, geofísica, química e biologia, dentre outras.

Seja qual for a área de estudo ou utilização das séries, é necessário, antes, compreender as duas principais propriedades das séries numéricas: convergência e divergência. Para o estudo dessas propriedades, existem ferramentas diversas; as mais simples tratam-se de testes de convergência vistos durante cursos de graduação. Porém, a limitação ao estudo destes não permite tratar situações mais complicadas (presentes em situações reais onde se aplica esse conhecimento matemático). Também, da maneira como são estudados, a própria teoria de séries parece restrita apenas ao cálculo de limites ou avaliação de desigualdades presentes nos testes.

Neste trabalho consideramos testes de diferentes graus de complexidade ligados ao teste de Cauchy, bem como exemplos que ilustram seu uso, juntamente com o comportamento das somas parciais em cada caso. Temos por objetivo relacionar a velocidade de convergência/divergência das somas parciais ao grau de complexidade das séries e à necessidade de aplicar testes mais sofisticados.

2 METODOLOGIA

2.1 Hierarquia de testes

Apresentamos três testes em ordem crescente de complexidade. Para os testes abaixo, consideremos $\sum a_n$ uma série de termos positivos.

Teste de Cauchy. Suponhamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = C$. Portanto:

a) Se $C < 1$, então $\sum a_n$ converge;

b) Se $C > 1$, temos que $\sum a_n$ diverge.

Teste I. Consideremos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\ln n}\left(1 - a_n^{\frac{1}{n}}\right) = I$. Assim:

a) Caso $I > 1$, então $\sum a_n$ converge;

b) Se $I < 1$, então $\sum a_n$ diverge.

Teste V. Consideremos que $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln \ln n}\left[\frac{n}{\ln n}\cdot\left(1 - a_n^{\frac{1}{n}}\right) - 1\right] = V$. Logo:

a) Se $V > 1$, segue que $\sum a_n$ converge;

b) Se $V < 1$, então $\sum a_n$ diverge.

2.2 Exemplos que ilustram o uso da hierarquia

Para cada teste mencionado acima, selecionamos um exemplo de série divergente pelo qual seu comportamento será determinado pelo teste em questão. Apresentamos, também, o gráfico das somas parciais em cada exemplo.

a) Investigação sobre o comportamento da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^4}$.

Aplicando o teste de Cauchy, obtemos $\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{n^4}\right)^{\frac{1}{n}} = 3 > 1$, o que significa que a série dada diverge. A seguir mostramos o gráfico das somas parciais desta série, que à medida que *n* cresce, tende, rapidamente, ao infinito.

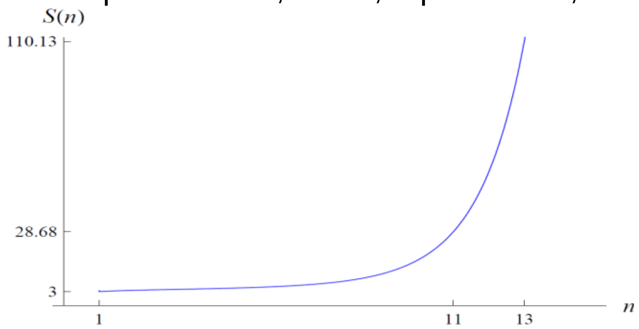

Figura 1. Gráfico das somas parciais para a série deste exemplo.

b) Análise do comportamento da série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Notamos que $\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\ln(\ln n)}{n}} = 1$; isto é, o teste de Cauchy não funciona. Aplicando o teste I:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}\left(1 - \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - (-\ln x)^{-x}}{-x \ln x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\ln x} = 0,$$

de onde segue a divergência da série, claramente representada no gráfico da Fig. 2.

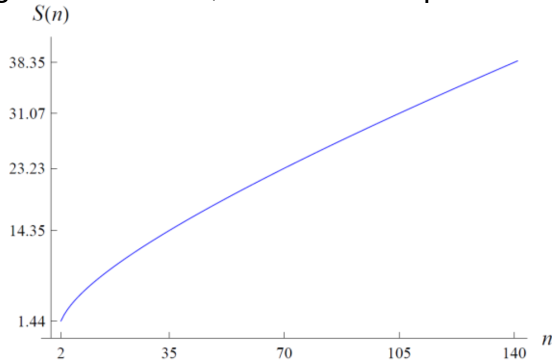

Figura 2. Gráfico das somas parciais para a série deste exemplo.

c) Determinação do comportamento da série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$.

Facilmente vemos que o teste I não funciona:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left[1-\left(\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}\right]=\lim_{n\to\infty}1=1.$$

Porém, aplicando o teste V:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\ln n}\left[\frac{n}{\ln n}\cdot\left(1-\left(\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}\right)-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\ln n}[1-1]=0<1.$$

Logo, concluímos que a série dada diverge.

A seguir, conferimos o gráfico das somas parciais desta série, divergindo, ainda mais lentamente, que a anterior divergente.

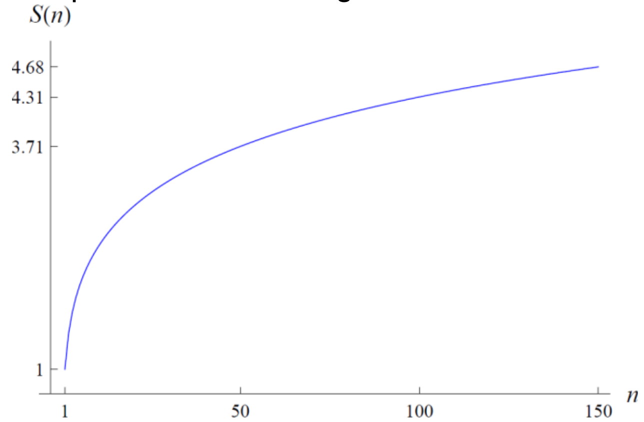

Figura 3. Gráfico das somas parciais para a série deste exemplo.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os três testes podem ser entendidos como uma família, em que cada posterior teste representa um meio mais eficaz e, possivelmente, esclarecedor do comportamento de um conjunto maior de séries que o anterior. De maneira semelhante, podemos entender o refinamento de testes como uma necessidade de estudar o comportamento de séries que, a cada vez, têm a velocidade de divergência mais lenta (e o mesmo ocorrendo se considerássemos a convergência).

Para ilustrar essas relações, na Fig. 4, são comparadas as somas parciais das séries divergentes divididas pela segunda soma parcial (a primeira, presente em todas as séries). Podemos observar que há uma relação qualitativa entre a velocidade de divergência e a complexidade de uma série. Resultados análogos são válidos, também, para convergência.

Assim, séries cujo comportamento é determinado através de testes mais refinados da hierarquia ligada a Cauchy, geometricamente, representam séries cuja velocidade de divergência é tão lenta a ponto de ser impossível tirar conclusões analisando os primeiros termos.

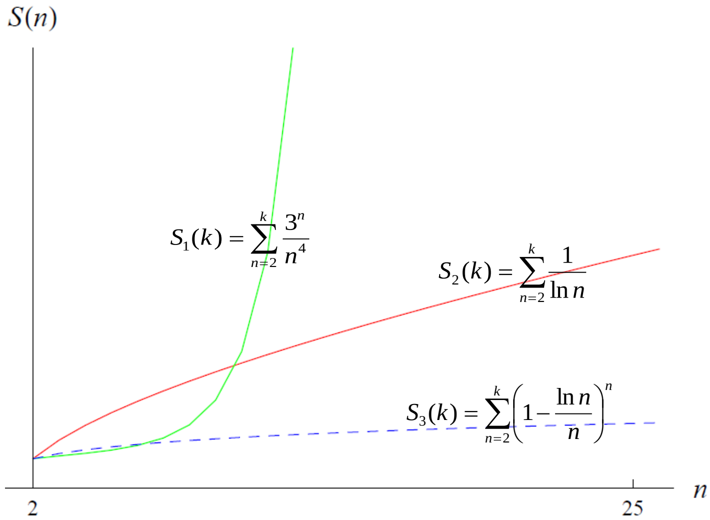

Figura 4. Comparação entre as somas parciais normalizadas das séries divergentes apresentadas no item 2.2.

4 CONCLUSÃO

Todas estas considerações não seriam necessárias se apenas existissem séries com velocidades de convergência ou divergência muito parecidas. Porém, os estudos teóricos e, em particular, os exemplos elaborados neste texto, mostram que essa não é a situação real. Mais do que isso, a teoria das séries revela que não há velocidade mínima de convergência/divergência e, em função disso, não existe um critério universal para investigar o comportamento de uma série.

Tudo isso contribuiu para que a teoria das séries alcançasse a profundidade e o refinamento do seu estado atual, além de atingir tamanha área de aplicabilidade. E isto é o que leva à necessidade de um estudo arguto sobre as características das séries, em primeiro lugar, as da convergência/divergência, mais compreensíveis a partir de um olhar geométrico.

5 REFERÊNCIAS

BONAR, D.D.; KHOURY, M.J.. **Real Infinite Series**. MAA, 2006.
BRESSOUD, D.. **A Radical Approach to Real Analysis**. MAA, 2006.
BROMWICH, T. J. I.. **An Introduction to the Theory of Infinite Series**. AMS, 2005.
FICHTENHOLZ, G. M.. **Infinite series: Rudiments**. Gordon and Breach Pub., 1970.
FICHTENHOLZ, G. M.. **Infinite series: Ramifications**. Gordon and Breach Pub., 1970.
GRADSHTEYN, I.S.; RYZHIK, I.M.. **Table of Integrals, Series, and Products**. Academic Press, 1994.
HYSLOP, J. M.. **Infinite Series**. Kessinger Pub., 2008.
KNOPP, K.. **Theory and Application of Infinite Series**. Dover Pub., 1990.
RUDIN, W.. **Principles of Mathematical Analysis**. McGraw-Hill, 1976.