MODELAGEM MATEMÁTICA DE CIRCUITOS ELÉTRICOS DO TIPO RLC

CORRÊA, Fabio[1]; CONTREIRA, Juliana[1]; RICCORDI FILHO, Yuri[1]; BICCA, Bruna[1]; BUSKE, Daniela[2]

[1]Universidade Federal de Pelotas – UFPel, graduação em Engenharia Civil.
fabiocorrea_@hotmail.com ; julianacontreira@hotmail.com
yuripodeser@gmail.com ; bbiccafernandes@gmail.com
[2] Universidade Federal de Pelotas – UFPel, IFM/DME, orientador, daniela.buske@ufpel.edu.br

1 INTRODUÇÃO

No presente trabalho, busca-se relacionar as informações físicas e equações matemáticas estudadas na disciplina de equações diferenciais ordinárias com o objetivo de modelar e resolver problemas que envolvam circuitos do tipo RLC (Resistor-Indutor-Capacitor). Com tais informações, objetiva-se o desenvolvimento de um método de resolução, partindo do estudo de um circuito RLC padrão que nos permita desenvolver a resolução matemática para outras situações similares.

Um circuito RLC - também conhecido como circuito ressonante ou circuito aceitador - é um circuito elétrico consistindo de um resistor (R), um indutor (L), e um capacitor (C), conectados em série ou em paralelo.

O circuito RLC é chamado de circuito de segunda ordem visto que qualquer tensão ou corrente nele pode ser descrita por uma equação diferencial de segunda ordem (BOYCE & DIPRIMA, 2001), e fisicamente por possuir dois elementos capazes de armazenar energia e que são irredutíveis entre si - dois elementos são considerados irredutíveis entre si quando não é possível reduzir os mesmos a um único elemento por associação em série ou paralelo.

2 METODOLOGIA

O estudo foi realizado com o intuito de resolver problemas que envolvam circuitos análogos de segunda ordem, basicamente juntando conceitos eletromagnéticos e aplicando-os em um cenário matemático. O estudo tem como principal objetivo encontrar uma solução para resolver diferentes situações que tratam da aplicação em circuitos análogos. Para tanto, um circuito análogo foi teorizado arbitrariamente e consideramos a problemática genérica, de forma que com a resolução deste circuito podemos chegar a solução de qualquer outro circuito RLC.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a realização de análise de casos, precisamos aliar conceitos físicos e matemáticos para chegar até uma definição e/ou padronização para resolver problemas que tenham como base a aplicação de circuitos análogos. Nosso ponto de partida para a resolução foi a Lei das malhas ou segunda lei de Kirchhoff, principal base para trabalhar com circuitos elétricos análogos.

Considerando um circuito elétrico RLC de maneira genérica com apenas um componente de cada elemento fundamental (Fig.1), onde E = E(t) é a diferença de potencial da fonte de alimentação e $i = i(t)$ é a intensidade da corrente elétrica.

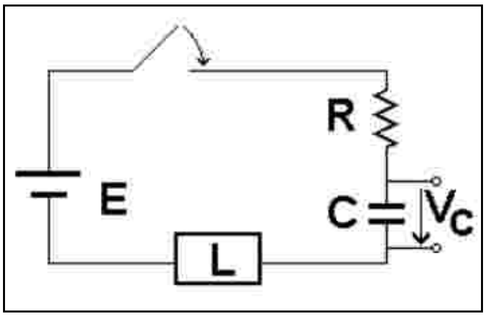

Figura 1 – Circuito base para o estudo

Aplicando a segunda lei de Kirchhoff, temos:

$$V_L(t) + V_R(t) + V_C(t) = E(t) \quad (1)$$

De acordo com conceitos eletromagnéticos, podemos definir cada um dos termos da equação (1) baseada nos princípios de Kirchhoff como:

- V_L é a diferença de potencial nos terminais do indutor:

$$V_L(t) = L\frac{di}{dt} \quad (2)$$

onde L é uma constante, chamada indutância.

- V_R é a diferença de potencial nos terminais dos resistores:

$$V_R(t) = Ri(t) \quad (3)$$

onde R (constante) é a resistência do resistor.

- V_C é a diferença de potencial nos terminais dos capacitores:

$$V_C(t) = \frac{1}{C}q \quad (4)$$

onde C é uma constante chamada de capacitância.

Substituindo cada componente (equações 2, 3 e 4) na equação inicial (1) chegamos ao seguinte resultado:

$$L\frac{di}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}q = E(t) \quad (5)$$

Como a carga do capacitor está relacionada com a corrente $i(t)$ pela relação $i = dq/dt$, temos, em termos de carga, a equação:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) \qquad (6)$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem para o potencial nas placas do capacitor.

Uma equação diferencial de 2ª ordem para a corrente elétrica no circuito pode ser obtida derivando-se a equação 5, que está escrita em termos de corrente. Assim:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = \frac{dE(t)}{dt} \qquad (7)$$

Fazendo a substituição $i = dq/dt$ temos:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{dE(t)}{dt} \qquad (8)$$

Com estes resultados baseados em um modelo simples, podemos resolver diversos problemas que envolvam um circuito RLC, sendo que o que vai alternar entre uma aplicação e outra é o número de componentes envolvidos.

Esta equação diferencial tem como condições iniciais $q(0) = q_0$ e $q'(0) = I_0$.

Como um exemplo de aplicação, consideramos um circuito RLC em série em que a indutância, a resistência e a capacitância são de respectivamente 0,25h, 10Ω e 0,001F. Vamos determinar a carga q(t) sobre o capacitor considerando as condições iniciais E(t) = 0, $q(0) = q_0$ e i(0) = 0 (SANTOS, 2010).

Substituindo os valores propostos em (8) obtemos:

$$0{,}25q'' + 10q' + 1000q = 0 \qquad (9)$$

Observe que este circuito RLC em série não possui fonte, o que nos leva a resolução de uma equação diferencial de segunda ordem homogênea. Resolvendo a equação homogênea (9), a solução geral do problema proposto é:

$$q(t) = e^{-20t}(C_1 cos60t + C_2\, sen60t) \qquad (10)$$

Aplicando as condições iniciais obtemos que:

$C_1 = q_0$ e $C_2 = \frac{1}{3} q_0$

Assim, substituindo C_1 e C_2 na equação (10), temos a solução:

$$q(t) = e^{-20t}\left(cos60t + \frac{1}{3} sen60t\right).$$

4 CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos um exemplo da aplicação das equações diferenciais ordinárias em problemas físicos. Nosso próximo objetivo determinar a solucao estacionária, $q_p(t)$ e a corrente estacionária em um circuito RLC em série quando a voltagem impressa for $E(t) = E_0 sen\gamma t$. Além disso estudaremos a aplicação de circuitos utilizando sistemas de equações, bem como procederemos a implementação numérica dos problemas estudados.

BIBLIOGRAFIA:

BOYCE, E. Willian & DIPRIMA, C. Richard; **Elementary Differential Equations** Editora LTC.; 2001

SANTOS J. Reginaldo; **Introdução às equações ordinárias**; 2010.